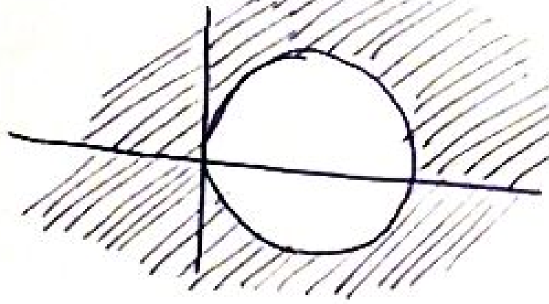
28/11/19

Πεπλεγμένη Euler

Περιοχή απόλυτης Ευστάθειας

$S=\{z\in\mathbb{C} : |1-z|\geq 1\}$



Ακρίβεια της πεπλ. Euler

Η f, συνεχής συνορ. κ' ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz: $hL\leq\frac{1}{2}$

$$\max_{0\leq n\leq N}|y(t^n)-y^n|\leq\frac{M}{2L}[e^{2L(b-a)}-1]h$$

$$M=\max_{t\in[a,b]}|y''(t)|$$

sos ↓ Το συμπέρασμα είναι:

(1) Τάξη ακρίβειας 1.

(2) Η σταθερά $C_1=\frac{M}{2L}(e^{2L(b-a)}-1)$ είναι ανεξαρτ. του h και εξ. από το f (Lipsch.: L)

(προηγ. μάθημα)

Άσκ:

ΠΑΤ: $\begin{cases} y'=y & t\in[0,1] \\ y(0)=1 \end{cases}$ Μεθ. Eul: Διακρ. ΠΑΤ $\begin{cases} y^{n+1}=y^n+hy^n=(1+h)y^n+O(h^2) \\ y^0=1 \end{cases}$

Μεθ. Taylor 2ης τάξης: $\begin{cases} y(t^{n+1})=y(t^n)+hy'(t^n)+\frac{h^2}{2}y''(t^n)+O(h^3) \\ y^0=1 \end{cases}$

τοπ. σφαλ. (δ^n)

↓ τάξης 3 μικρ. τοπ. σφάλμα

επειδή τα βήματα είναι μικρά υποθέτεις ότι το t^{n+1} είναι στη γειτονιά του t^n

Για να υπολ. το τοπικό σφάλμα:

$$\delta^n=y(t^{n+1})-y^{n+1}=$$

$$=y(t^n)+hy'(t^n)+\frac{h^2}{2}y''(\xi^n)-(y^n+hf(t^n,y^n))$$

Taylor: καλύτερη διότι έχει μικρ. τοπ. σφάλμα άρα μικρ. ολικό σφάλμα

Άσκηση : $x(t),\ y(t),\ t \geq 0$

ΠΑΤ : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(t) & t \geq 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \end{cases}$

Αν γράφει (*) μεθ. Eul. τότε υποθέτουμε την άμεση.

(α) Δ.Ο $x^2(t) + y^2(t) = 1 \quad t \geq 0$.

(β) (x^n, y^n), $n \geq 0$, με τη μέθοδο Euler $h > 0$ (*)

Δ.Ο $(x^n)^2 + (y^n)^2 \longrightarrow \infty$

(γ) (x^n, y^n), $n \geq 0$, με τη μέθοδο Τραπεζίου $h > 0$

Δ.Ο $(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1$

(δ) Τι μπορούμε να πούμε για την πεπλεγμ. Euler.

Λύση.

Ουσιαστικά έχουμε:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -x \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + x = 0$$

γραφή κατά Newton

Από χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow a = \pm i$$

Άρα $x(t) = e^{at}$: $\begin{cases} x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y(t) = C_3 \cos t + C_4 \sin t \end{cases}$

με βάση τις Α.Σ. : $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

α) $(x^2(t)+y^2(t))' = 2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)y'(t)$

$$= -2x(t)y(t) + 2y(t)x(t) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow x^2(t)+y^2(t) = \text{σταθερή} \\ &\underset{1}{x^2(0)} + \underset{0}{y^2(0)} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2(t)+y^2(t) = 1$$

(β) (παίρνω το συνεχές και το κάτω διακριτό)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - hy^n \\ y^{n+1} &= y^n + hx^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n - hy^n)^2 + (y^n + hx^n)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n)^2 - 2hx^ny^n + h^2(y^n)^2 + (y^n)^2 + 2hx^ny^n + h^2(x^n)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (1+h^2)\underbrace{\left[(x^n)^2 + (y^n)^2\right]}_{n \to 1}$$

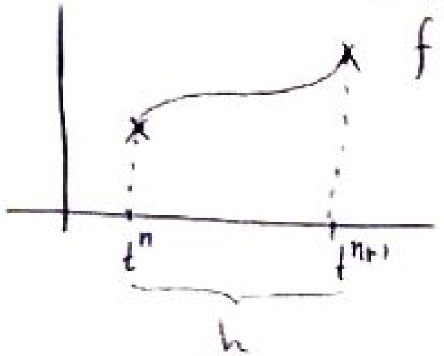
Επαγωγικά: $(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (1+h^2)^{n+1}\left[(\overset{1}{x^0})^2 + (\overset{0}{y^0})^2\right]$

$$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = (1+h^2)^n \cdot 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

(γ) Ξεκινάω με το πρόβλημα αρχικών τιμών και φτιάχνω το διακριτό ανάλογο.

$$\text{Π.Α.Τ.}: \begin{cases} y' = f(t,y), \quad t \in [a,b] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Φτιάχνω το σχήμα:



Αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος αλλά και η ακρίβεια της μεθόδου.

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s)\,ds = \frac{h}{2}\left(f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right)$$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\begin{bmatrix} -(y^n + y^{n+1}) \\ x^n + x^{n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^{n+1} = x^n - \frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{n+1} - x^n = -\frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) & \cdot (x^{n+1} + x^n) \\ & \Rightarrow \\ y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}) & \cdot (y^{n+1} + y^n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^{n+1} - x^n)(x^{n+1} + x^n) = -\frac{h}{2}(y^n + y^{n+1})(x^{n+1} + x^n) \\ (y^{n+1} - y^n)(y^{n+1} + y^n) = \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1})(y^{n+1} + y^n) \end{cases}$$

Προσθέτω κατα μέλη:

$$(x^{n+1}-x^n)(x^{n+1}+x^n)+(y^{n+1}-y^n)(y^{n+1}+y^n)=$$

$$=-\frac{h}{2}(y^n+y^{n+1})(x^{n+1}+x^n)+\frac{h}{2}(x^n+x^{n+1})(y^{n+1}+y^n)=0$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2-(x^n)^2+(y^{n+1})^2-(y^n)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2=(x^n)^2+(y^n)^2 \overset{\text{επαγωγικά}}{=}$$

$$=(x^0)^2+(y^0)^2=1 \quad \text{άρα} \quad \boxed{(x^n)^2+(y^n)^2=1}$$

(δ) $$(x^n)^2+(y^n)^2=\frac{1}{(1+h^2)^n}\underbrace{\left[(x^0)^2+(y^0)^2\right]}_{1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

↓ γιατι το $\frac{1}{1+h^2}<1$

(Άμεση + πεπλ. δεν δουλεύουν για αυτό το πρόβλημα, ενω η τραπεζία δουλεύει.)

Ασκηση

ΠΑΤ. : $\begin{cases} y'=My(t) & t\geq 0 \\ y(0)=y_0, & M\in\mathbb{R}^{m,m} \end{cases}$

οπου M ενας μη θετικά οριζμένος πινακας

$(Mx,x)\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}^m$ (εχω M εξισώσεις)

Αν y^n είναι η προσέγγιση της $y(t^n)$ με την πεπλ. Euler, $t^n=nh$, Νδο. : $\|y^{n+1}\|\leq\|y^n\|$, $n\in\mathbb{N}^*$

$\|\cdot\|$: ευκλείδεια νόρμα.

SOS (έχει πέσει)

Απ

Δηλαδή να δείξουμε ότι η ευκλείδεια νόρμα των προσεγγίσεων φθίνει (φθ. ακολ.)

πεπλ Euler: $\bar{y}^{n+1} = \bar{y}^{n} + hM\bar{y}^{n+1}$

(Διανύσματα: καταχρηστικά δεν θα βάλουμε παύλα)

(1) Εκμεταλλευόμαστε την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz (εφόσον είμαστε στα συστήματα)

(2) Εργαζόμαστε με την ευκλ. νόρμα: $\|y^{n+1}\|$

$$\|y^{n+1}\|^2 = (y^{n+1}, y^{n+1}) = (y^n + hMy^{n+1}, y^{n+1})$$

$$= (y^n, y^{n+1}) + h\underbrace{(My^{n+1}, y^{n+1})}_{\leq 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 = (y^{n+1}, y^{n+1}) \leq (y^n, y^{n+1}) \overset{C-S}{\leq} \|y^n\|\|y^{n+1}\|$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 = \|y^{n+1}\|\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|\|y^{n+1}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$$

Παρατ.

C-S: $(x,y) \leq \|x\|\|y\|$

SOS για τις εξ.

Νδο $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$ με τη μέθοδο του τραπεζίου

Πεπλ. Euler

Η $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη Lipschitz

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + \delta^n$$

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$$

κάνω ένα βήμα με την αριθμ. μέθοδ. ξεκινώντας από μια γνωστή τιμή

οπότε

$$\varepsilon^{n+1} = y(t^{n+1}) - y^{n+1} =$$

$$= \underbrace{\varepsilon^n}_{y(t^n)-y^n} + h[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})] + \delta^n$$

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις θέλουμε ν.δ.ο

$$\max_{0\le n\le N} |\varepsilon^n| \le \frac{b-a}{2} Mh \quad , M = \max_{t\in[a,b]} |y''(t)|$$

(τάξης 1) ↳ ολικό σφάλμα.

Απ: $\varepsilon^{n+1} = y(t^{n+1}) - y^{n+1}$ Από μονοπλ. Lipschitz

$$|\varepsilon^{n+1}|^2 \le |\varepsilon^n||\varepsilon^{n+1}| + |\delta^n||\varepsilon^{n+1}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + |\delta^n| \le |\varepsilon^n| + \max_{0\le i\le N-1} |\delta^i|$$

$$\Rightarrow \text{Επαγ} \Rightarrow |\varepsilon^n| \le \underbrace{|\varepsilon^0|}_{|y(t^0)-y^0|=0} + n\max_i |\delta^i| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^n| \le n \max_{0\le i\le N-1} |\delta^i|$$

$\Rightarrow \max_n |\varepsilon^n| \le n \frac{M}{2} h^2$, $M = \max_t |y''(t)| \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \max_n |\varepsilon^n| \le \frac{(b-a)}{2} M h$ $1^{ης}$ τάξης Ακρίβεια.

Μέθοδος Τραπεζίου

γενικό: $\begin{cases} y' = f(t,y) , & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f\underbrace{(t^{n+1}, y^{n+1})} \right] \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

(1) Πεπλεγμένη Μεθοδος (λογω)

(2) Ολικό σφάλμα – Ακρίβεια : 2.

(3) Τρόπος κατασκευής : Με ολοκλήρωση: (ασκηση)

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(s)\,ds = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s, \overset{y(s)}{y})\,ds$$ και πρεπει να φτασω στο διακριτό αναλογο

Περιοχή Απόλυτης Ευστάθειας

Πρόβλημα δοκιμής: $\begin{cases} y' = \lambda y , & t \ge 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) < 0$

Μεθ. Τρ

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[\lambda y^n + \lambda y^{n+1}\right] \Rightarrow$$

αναδρ. τύπος.

$$\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) y^{n+1} = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y^n \Rightarrow \boxed{y^{n+1} = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} y^n}$$

παραγοντη απης εισα. μπορει να γραφει ως:

$$\Rightarrow y^{n+1} = r(\lambda h) y^n$$

$z = \lambda h$

και μιγαδικοί

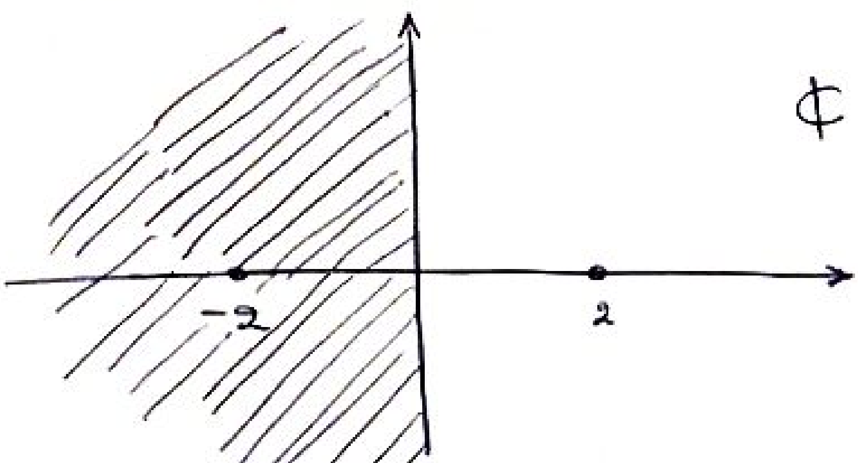
Απλ. η περιοχή είναι:

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \} =$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq |z-2| \}$$

$$= \mathbb{C}^-$$

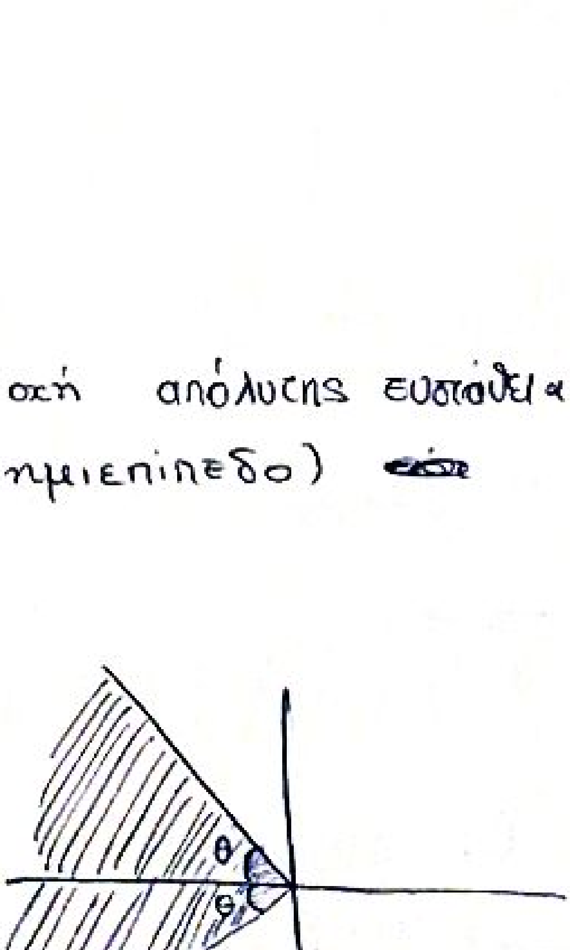
<u>Σχηματικά</u>



<u>Παρατήρηση</u> (ορισμός ↓)

(1) Μέθοδοι των οποίων η περιοχή απόλυτης ευστάθειας είναι το $\mathbb{C}^-$ (το αριστερό ημιεπίπεδο) ονομάζονται <u>A-ευσταθής</u>

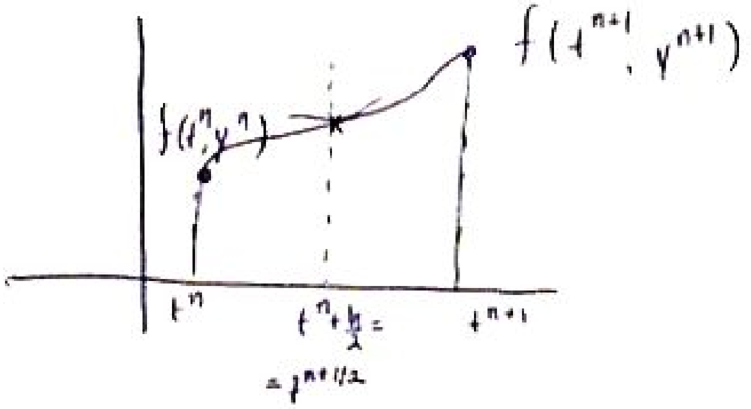
(2) Αν η μέθοδος περιέχει ως περιοχή απολ. ευστάθειας το χωρίο S_θ τότε η μεθ. λέγεται $A(\theta)$-ευσταθής



Μέθοδος του Μέσου

για ενδιάμεση χρονική στιγμή

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$



Ένας συναρτησιακός υπολογισμός. (εξαρτάται) απο το y^{n+1} αρα είναι πεπλεγμένη.

(1) Πεπλεγμένη

(2) Συμπίπτει με τη μέθοδο του Τραπεζίου για το πρόβλημα δοκιμής.

Εργαζ. στο π. δοκ. τότε:

$$y^{n+1} = y^n + \underbrace{h\frac{\lambda}{2}(y^n + y^{n+1})}_{\text{Μεθ Τραπ.}} = y^n + \underbrace{\frac{h}{2}(\lambda y^n + \lambda y^{n+1})}_{\text{Μεθ. μέσου}}$$

Άρα

Περιοχή απολ. Ευστ. : $S = \mathbb{C}^-$